ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο :

Α. **1. Απάντηση:** Σχολικό βιβλίο σελ. 194
2. Απάντηση: Σχολικό βιβλίο σελ. 280

Β.

α. **Λ**
β. **Λ**
γ. **Σ**
δ. **Σ**
ε. **Λ**
στ. **Σ**

ΘΕΜΑ 2ο :

α. Έχουμε διαδοχικά:

$$|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1.\overline{z_1} = 9 \Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$$

β. Έστω $w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$. Για να δείξουμε ότι ο w είναι πραγματικός

αρκεί: $\mathrm{Im}(w) = 0 \Rightarrow w - \overline{w} = 0 \Rightarrow \overline{w} = w$

Έχουμε:

$$\overline{w} = \overline{\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} + \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} \qquad (1)$$

Λόγω του (α) έχουμε: $\overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$ και $\overline{z_2} = \frac{9}{z_2}$ οπότε:

$$(1) \qquad \Leftrightarrow \overline{w} = \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \frac{9z_2}{9z_1} + \frac{9z_1}{9z_2} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} = w$$

γ. Έχουμε:

$$|z_1 + z_2 + z_3| = \left|\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right| = \left|\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right| \overset{(\alpha)}{=} \left|\frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3}\right| =$$

$$= 9\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = \ldots = 9\frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{|z_1.z_2.z_3|} = 9\frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{|z_1|.|z_2|.|z_3|} =$$

$$= 9\frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{27} = \frac{1}{3}|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|$$

ΘΕΜΑ 3ο :

α. $f(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda>0$

πεδίο ορισμού: $D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=(e^{\lambda x})'=e^{\lambda x}(\lambda x)'=\lambda e^{\lambda x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

β. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής.

Η εφαπτόμενη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$y-e^{\lambda x_0}=\lambda e^{\lambda x_0}(x-x_0)$

Διέρχεται από το O(0,0) οπότε

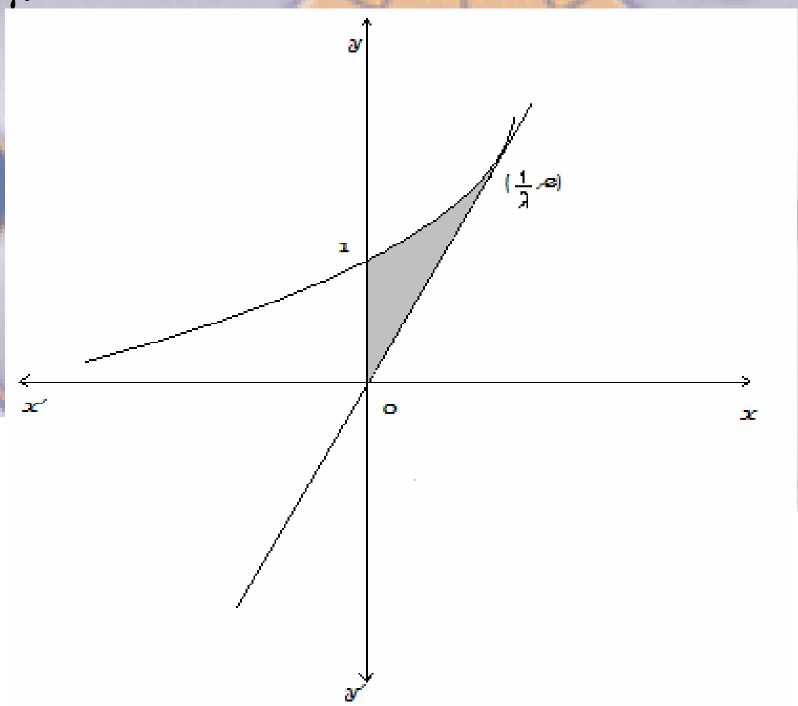
$$-e^{\lambda\chi_0}=\lambda e^{\lambda\chi_o}(-\chi_o)\Leftrightarrow\lambda\chi_o e^{\lambda\chi_o}-e^{\lambda\chi_o}=0\Leftrightarrow e^{\lambda\chi_o}(\lambda\chi_o-1)=0\Leftrightarrow\chi_o=\frac{1}{\lambda}$$

Επομένως $y-e=\lambda e(\chi-\frac{1}{\lambda})$

$y-e=\lambda e\chi-e\Leftrightarrow y=\lambda e\chi$

$f(\frac{1}{\lambda})=e$ άρα $M(\frac{1}{\lambda},e)$

γ.



$$E(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left(e^{\lambda x}-\lambda ex\right)dx=\left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}-\frac{\lambda ex^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}=$$

$$=\left(\frac{e}{\lambda}-\frac{e}{2\lambda}\right)-\left(\frac{e^0}{\lambda}-0\right)=\frac{2e}{2\lambda}-\frac{e}{2\lambda}-\frac{1}{\lambda}=\frac{e}{2\lambda}-\frac{2}{2\lambda}=\frac{e-2}{2\lambda}\quad\tau.\mu.$$

δ. Έχουμε:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2 \mathrm{E}(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=\frac{\lambda^2\dfrac{e-2}{2\lambda}}{2+\eta\mu\lambda}=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{e-2}{2}.\frac{\lambda}{2\eta\mu\lambda}\right)=\frac{e-2}{2}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda}{2\eta\mu\lambda}=$$

$$=\frac{e-2}{2}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}}$$

Αφού

$$\left|\frac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}\right|\le\frac{2}{\lambda}\quad \text{και}\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{2}{\lambda}=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(-\frac{2}{\lambda}\right)=0$$

θα ισχύει και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}=0$.

Επομένως, αφού $\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}>0$ θα ισχύει $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}}=+\infty$

ΘΕΜΑ 4ο :

α. Έχουμε:

$$2f'(x)=e^{x-f(x)}\Leftrightarrow$$

$$2f'(x)=\frac{e^x}{e^{f(x)}}\Leftrightarrow 2e^{f(x)}\cdot f'(x)=e^x\Leftrightarrow\left(2e^{f(x)}\right)'=e^x$$

$$\left(2e^{f(x)}\right)'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow 2e^{f(x)}=e^x+c, c\in R$$

Για x=0

$$2e^{f(0)}=e^0+c\Leftrightarrow 2e^1=1+c\Leftrightarrow c=1$$

Άρα

$$2e^{f(x)}=e^x+1\Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{e^x+1}{2}\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right), x\in R$$

β.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)}{\eta\mu x}$$

Θέτω $u=x-t$ άρα $du=-dt$

Για $t=0$ $u=x$

Για $t=x$ $u=0$

Οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_o^\chi f(\chi-t)dt}{\eta\mu\chi}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu\chi}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\chi)}{\sigma\upsilon\nu\chi}=\frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0}=\frac{0}{1}=0$$

γ. Έχουμε

$$h(x)=\int_{-\chi}^{\chi} t^{2005}f(t)dt$$

$$g(x)=\frac{x^{2007}}{2007}$$

$$h(x)=\int_{-x}^{o} t^{2005}f(t)dt+\int_{o}^{x} t^{2005}f(t)dt=-\int_{-x}^{o} t^{2005}f(t)dt+\int_{o}^{x} t^{2005}f(t)dt$$

Υπολογίζουμε την h΄(x):

$$h'(x) = -(-x)^{2005} f(-x) + x^{2005} f(x) =$$

$$= x^{2005}\left(f(x) + f(-x)\right) = x^{2005}\left(\ln\frac{\left(e^{x}+1\right)}{2} - \ln\frac{\left(e^{-x}+1\right)}{2}\right) = x^{2005}x = x^{2006}$$

και

Άρα $h'(x) = g'(x)$ οπότε $h(x) = g(x) + c$

Για χ=0

$h(0) = g(0) + c \Leftrightarrow c = 0$

δ.

Η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)\,dt = \frac{1}{2008}$ είναι ισοδύναμη με την $g(x) = \frac{1}{2008}$

Έστω $\phi(x) = g(x) - \frac{1}{2008} = \frac{x^{2007}}{2007} - \frac{1}{2008}$

Η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$

Με $\phi(0) = -\frac{1}{2008} < 0$

$\phi(1) = \frac{1^{2007}}{2007} - \frac{1}{2008} > 0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε $\phi(x_0) = 0$

δηλαδή $g(x_0) = \frac{1}{2008}$

Όμως $\phi'(\chi) = g'(x) = x^{2006} > 0$ για κάθε $x \neq 0$, αρα $\phi(x)$ γνησίως αύξουσα στο$[0,1]$.Συνεπώς το x_o είναι μοναδικό.